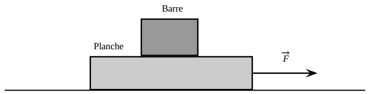
TD N° 3: MÉCANIQUE DU SOLIDE
Lois du frottement solide

Exercices techniques niveau 1

EXERCICE N°1: **Frottement entre deux solides**

Une barre de masse m_1 est placé sur une planche de masse m_2, et l'ensemble repose sans frottement sur un plan horizontal. Le facteur de frottement statique entre la barre et la planche est μ_s.



On exerce sur la planche une force horizontale $\overrightarrow{F}$ dont l'intensité croît linéairement avec le temps:

$$F(t) = \alpha \cdot t \quad \text{avec } \alpha \text{ constant.}$$

❶ Ecrire les deux équations différentielles décrivant le mouvement de la barre et de la planche, et projeter chacune d'elle sur l'axe du mouvement.

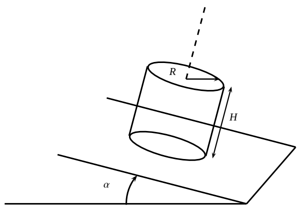
❷ Déterminer l'instant t_0 à partir duquel la planche glisse sous la barre.

❸ Quelles sont les accélérations de la barre et de la planche dans les phases de non-glissement et de glissement?

EXERCICE N°2: **A la limite de l'arc boutement: basculement**

Un cylindre homogène de rayon R et de hauteur H est posé sur un plan dont l'inclinaison par rapport à l'horizontale peut varier.

On appelle μ_s le coefficient de frottement statique entre le cylindre et le plan. Le plan est lentement incliné.



A quelle condition sur le rapport $\dfrac{H}{R}$ le cylindre commence-t-il à glisser plutôt que basculer?

Exercices techniques niveau 2

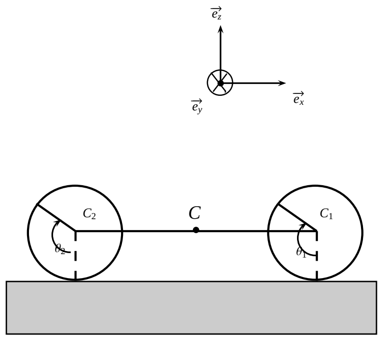
EXERCICE N°3: **Etude du démarrage d'une moto**

On modélise dans cet exercice le démarrage d'une moto. LA roue avant est assimilée à un disque homogène, de masse m, de rayon a et de centre C_1 (abscisse x_1). Sa rotation est repérée par l'angle θ_1, mesuré par rapport à la verticale. La roue arrière, motrice, est identique à la roue avant. L'abscisse de son centre est notée x_2 et son angle de rotation est appelé θ_2. L'ensemble cadre+moteur+conducteur (noté (E)) est modélisé par une tige, de longueur $2l$ et de masse M reliant C_1 à C_2. SOn centre de masse C possède l'abscisse x au milieu de C_1C_2.

Le coefficient de frottement entre les roues et le sol est noté μ. L'action de (E) sur la roue avant se réduit à la résultante $F_1 = F_{1_x} \cdot \overrightarrow{e_x} + F_{1_z} \cdot \overrightarrow{e_z}$. L'action de (E) sur la roue arrière se compose d'une résultante $\overrightarrow{F_2}$ et d'un couple moteur $\overrightarrow{\Gamma} = \Gamma \cdot \overrightarrow{e_y}$.

De même, l'action du sol sur la roue avant (arrière) correspond à une force $\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{N_1}$ ($\overrightarrow{R_2} = \overrightarrow{T_2} + \overrightarrow{N_2}$).

On donne le moment d'inertie des roues $J_{C,y} = \dfrac{1}{2} m a^2$



❶ Enoncer une relation entre $\dot{x}$, $\dot{x}_1$, et $\dot{x}_2$. On suppose que les deux roues roulent sans glisser sur le sol, ce qui signifie que la distance parcourue par le cadre peut aussi être obtenue à partir du nombre de tours effectués par l'une des roues.

En déduire une relation entre $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, $\dot{x}$.

❷ Appliquer le théorème du centre de masse à l'ensemble de la moto. Quelles sont les forces extérieures la faisant avancer?

❸ Appliquer à la roue avant la relation fondamentale de la dynamique, puis le théorème du moment cinétique dans le référentiel $(C_1, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Obtenir les relations entre les forces, masses, et l'accélération $\ddot{x}$.

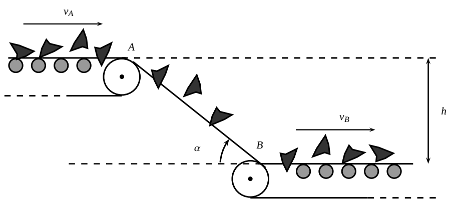
❹ Procéder similairement avec la roue arrière, puis l'ensemble (E).

❺ La roue avant peut-elle se soulever? Et la roue arrière?

❻ On supposera désormais $m << M$. La roue avant peut-elle glisser? Et la roue arrière?

Exercice n°4: Transport de minerai

L'évacuation des blocs de minerai en sortie d'une mine de métal est réalisée à l'aide d'un tapis roulant se déplaçant à la vitesse $v_A = 1\ m.s^{-1}$, permettant d'amener ces derniers à l'horizontale jusqu'à un tapis fixe incliné d'un angle $\alpha = 30^0$. Les blocs glissent ensuite sur le tapis fixe pour arriver sur un second tapis roulant horizontal se déplaçant à la vitesse v_B. On note h la différence de hauteur entre les deux tapis horizontaux.



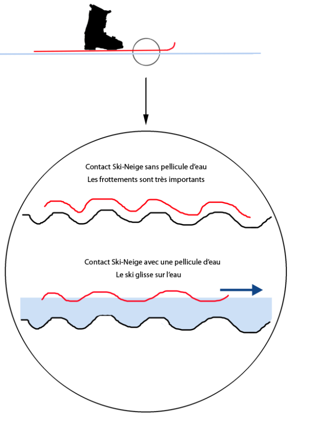
On suppose que l'analyse se fait dans le référentiel terrestre considéré galiléen. Le fonctionnement normal de l'ensemble est assuré si la vitesse du second tapis est exactement identique à la vitesse des blocs arrivant à sa hauteur.
On pose que le coefficient de frottement dynamique vaut $\mu = 0.5$.

❶ Déterminer par une méthode dynamique la vitesse v_B à donner au second tapis pour assurer un fonctionnement correct du tapis.

❷ Reprendre cette étude par une méthode énergétique.

Exercice n°5: Pellicule d'eau sous un ski

Le bon déplacement d'un skieur est assuré par une fine lame d'eau liquide sous le ski, résultant de la fonte des cristaux de neige sous l'effet du frottement de la semelle du ski contre celle-ci. L'exercice qui suit propose d'étudier la phase de création de cette couche d'eau liquide par une analyse énergétique. Le skieur de masse m évolue sur un plan horizontal (O, x, y) à la vitesse $\overrightarrow{V} = V \cdot \overrightarrow{e_x}$ constante sous l'effet d'une force de poussée F supposée de même support que la vitesse. Le ski est supposé avoir la même vitesse. On note μ le coefficient de frottement caractéristique du contact semelle-neige. On s'intéresse à la phase de création de la couche d'eau liquide sous une partie du ski.



❶ En l'absence d'eau sous le ski, donner l'expression de la puissance des actions de contact entre la semelle et la neige en fonction de μ, m, g, et de la vitesse V.

On suppose pour simplifier que la quantité de chaleur ainsi dégagée lors d'un déplacement dx du ski est intégralement utilisée pour provoquer la fusion de la neige sur la largeur L du ski, sur une épaisseur e et sur la longueur dx. On note L_{fus} la chaleur latente massique de fusion de la neige et ρ sa masse volumique.

❷ Donner l'expression de l'épaisseur e en fonction de L_{fus}, μ, m, g, V, L et ρ. Les lois de Coulomb vous paraissent-elles bien adaptées à la description du contact ski-neige sur toute la surface de la semelle?

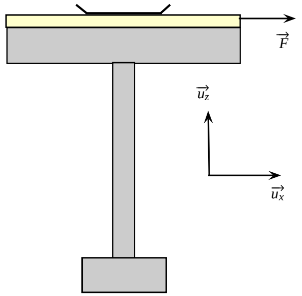
Problèmes contextualisés

Exercice n°6: Le jeu de la nappe (après celui du verre d'eau[1]!!!)

[1] cf TD2 exercice n°7

Les deux étudiants du «jeu du verre d'eau» (TD2 exercice n7) sont maintenant en terrasse d'un restaurant et leur table est garnie d'une nappe de masse m et le couvert sont mis. Ils décident de s'adonner à un jeu tout aussi intelligent que le jeu du verre d'eau: le «jeu de la nappe».

Ce dernier consiste à retirer les couverts à l'exception d'une assiette de masse M, puis de tirer la nappe assez brutalement de telle sorte que l'assiette ne quitte pas la table.



On modèlise la table par un disque de centre O et de rayon R. La nappe possède exactement les mêmes dimensions que la table et l'on négligera son épaisseur. L'assiette est circulaire, de rayon r et est placée au centre de la table.

L'un des étudiant entame le jeu et tire le bord de la nappe avec une force horizontale:

$$\overrightarrow{F} = m\alpha t \cdot \overrightarrow{u_x} \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante}$$

On admet un glissement parfait entre la table et la nappe et le coefficient de frottement solide entre la nappe et l'assiette vaut μ.

❶ On suppose que, tout au long de l'expérience, l'assiette glisse par rapport à la nappe. Est-ce réellement le cas? Quel est le signe de la vitesse de l'assiette par rapport à la nappe, en projection sur $[Ox)$?

❷ Calculer l'accélération du centre de masse de l'assiette $\ddot{x}_a$ et celui de la nappe $\ddot{x}_n$ dans le référentiel de la pièce. En déduire $x_a(t)$ et $x_n(t)$.

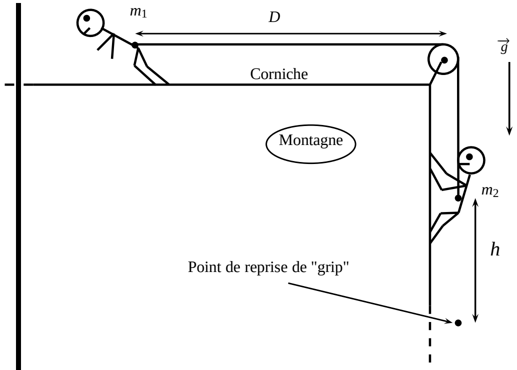
❸ Jusqu'à quel date τ a-t-on le contact entre la nappe et l'assiette?

❹ Lors d'un mouvement vif, on a au moins $\alpha = 2500\ m.s^{-3}$. Essayer de justifier cet ordre de grandeur. Sachant que $M = 400\ g$, $m = 50\ g$, $R = 25\ cm$, $r = 5\ cm$, $g = 9,8\ m.s^{-2}$, et $\mu = 0,2$ où est l'assiette quand le contact nappe-assiette cesse? Conclusion.

Exercice n°7: **Dévissage mortel!!! ou pas?**

Le dévissage en cordée est l'une des causes les plus fréquentes d'accident mortel en montagne. On propose ici de modéliser une situation particulière de "cordée à deux" dans laquelle le dévissage partiel d'un alpiniste peut entraîner la chute et la mort du second.

Lors de l'ascension des deux sportifs, le premier alpiniste de masse m_1 a atteint une corniche horizontale, alors que le second de masse m_2 est toujours en phase d'ascension en dessous de lui contre le flanc de montagne supposé exactement vertical. On suppose pour simplifier que les deux alpinistes avancent à la même vitesse, de sorte que la corde les reliant reste toujours tendue, le renvoi de corde au bord de la corniche se faisant à l'aide d'une poulie supposée sans inertie, et qu'à ce moment de leur ascension aucune prise de la corde dans la roche de la montagne ne les sécurisent.



A un instant donné, le second alpiniste est en difficulté, s'arrête (arrêtant de fait son collègue) **et se suspend dans le vide pour retrouver une prise**. Malheureusement, le premier alpiniste, mal arrimé, et se trouvant à la distance $D > h$ du bord de la corniche est entraîné par la corde et se met à glisser avec un coefficient de frottement solide μ. Dans une seconde phase, le second alpiniste retrouve une prise après être descendu brutalement d'une hauteur h dans le vide.

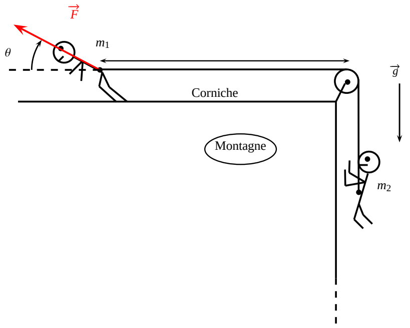
❶ Dégager la condition sur le coefficient de frottement μ pour que les deux alpinistes survivent à cette mésaventure. On fera l'analyse à l'aide d'une méthode énergétique.

❷ Que devient cette étude si l'on considère maintenant que la poulie possède un moment d'inertie J autour de son axe de rotation.

Indication: pour la seconde question, il sera peut-être nécessaire de revoir les notions de moment d'inertie et de bras de levier développée en MPSI.

EXERCICE N°8: **Après le dévissage!!!**

Les deux alpinistes évoqués dans l'exercice précédent, finalement sortis indemnes du dévissage, décident de reprendre leur ascension. Pour cela, l'alpiniste de masse m_1 resté sur la corniche horizontale décide de "tracter" son camarade de masse m_2 qui se laisse pendre dans le vide:



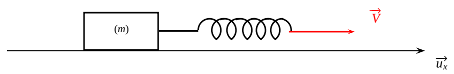
L'effort développé par l'alpiniste sur le sol se traduit par une réaction de ce dernier modélisé par une force $\overrightarrow{F}$ faisant un angle θ avec l'horizontale.

Déterminer la valeur à donner à l'angle θ pour s'assurer que nos deux alpinistes montent à nouveau.

Données: $\begin{cases} m_1 = 70\ kg \\ m_2 = 50\ kg \\ ||\overrightarrow{F} = 1000\ N|| \\ \mu_d = 0,2 \end{cases}$

EXERCICE N°9: **Crissement d'une craie ou grincement d'une porte**

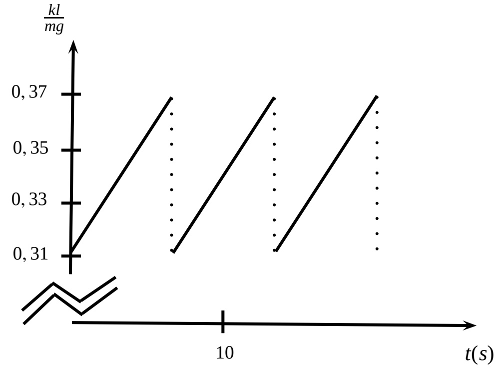
Un palet de masse m, peut glisser sur une plaque horizontale fixe. Le palet est attaché à un ressort, de raideur k, dont l'extrêmité est entraînée à vitesse fixe $\overrightarrow{V} = V \cdot \overrightarrow{e_x}$.



On appelle l l'élongation du ressort par rapport à sa longueur à vide. Les coefficients de frottement statique et dynamique sol-palet sont notés μ_s et μ.

❶ Calculer l'élongation l_p du ressort en régime permanent. Ce régime est-il stable?

❷ En revanche, quand V est assez faible, on observe un régime nommé fixe-glisse et dont le profil d'élongation est tracé sur la figure ci-dessous. Dans ce régime, alternativement, le palet est fixe, puis se détache brusquement et glisse. Identifier les deux types de régimes sur cette figure et expliquer l'allure générale.



❸ Calculer l'élongation l_1 en fin de phase "*fixe*". Pour trouver celle de fin de phase "*glisse*" l_2, on écrira notamment l'équation régissant l'évolution $l(t)$. En déduire μ_s et μ.

❹ Expliquer pourquoi le mouvement est périodique et évaluer sa période T_0 sachant que $m = 1,6\ kg$, $k = 1,5.10^2\ N.cm^{-1}$, $V = 10\ \mu m.s^{-1}$. Comparer à la figure donnée.

❺ Le phénomène fixe-glisse est à l'origine du crissement des craies ou des pneus, ou bien des grincements de gonds de porte. Dans quel domaine se trouve alors T_0? Comment empêcher, par exemple, des gonds de porte de grincer, ou une raie de crisser?